¿Son éstas las matemáticas que deseamos?

por

J. M. Sanz-Serna

Resumen. Este artículo contiene unas reflexiones personales sobre la enseñanza actual de las matemáticas en España en las etapas previas a la universidad. Es un llamamiento en favor del pensamiento contra la receta, en favor del problema, por fácil que sea, frente al ejercicio rutinario.

1. Introducción

Este artículo contiene unas reflexiones personales sobre la enseñanza actual de las matemáticas en España en las etapas previas a la universidad y posteriores al aprendizaje de las cuatro reglas y las fracciones. Es por tanto hijo del atrevimiento: cualquier colega podría publicar, con igual derecho, sus propios pensamientos sobre esta materia, que, aunque distintos de los que expondré, serán igualmente valiosos o tal vez más. Si me he decidido a remitir mis opiniones a La Gaceta ha sido animado por colegas del Departamento de Matemáticas de la Universidad Carlos III de Madrid. No aspiro a convencer a nadie de nada, pero si estas páginas contribuyeran a abrir un debate sobre la materia me sentiría muy satisfecho. Y la satisfacción superaría lo que puedo concebir si sirvieran, aun en grado mínimo y a largo plazo, para que las recetas fueran desapareciendo de nuestras aulas secundarias, sustituidas por el pensamiento, y la rutina del ejercicio mecánico se aliviase entreverando en clase algún que otro problema.

Por brevedad usaré, en cuanto sigue, el inexacto adjetivo «secundaria» para referirme a esta etapa de la formación de niños y jóvenes.

2. Matemática formativa

Creo no equivocarme si afirmo que todo matemático está convencido de que uno de los aspectos más valiosos de su ciencia es la cimentación en el pensamiento abstracto. Como consecuencia, todos ellos recomiendan el estudio de las matemáticas en la secundaria como medio de desarrollar la capacidad de razonar.

He aquí algunos sencillos ejemplos de matemáticas que, efectivamente, enseñan a pensar:

Ejemplo. «Las tres mediatrices de un triángulo se cortan en un punto». Éste es un aserto no obvio que sorprende la primera vez que se oye. No obstante entender la demostración no es difícil incluso para un niño de pocos años. □

Ejemplo. Littlewood recogió en un curioso libro llamado *Miscelánea* una mezcla sorprendente de reflexiones, anécdotas de la vida en Cambridge, teoremas y problemas. La obra comienza presentando 19 fragmentos matemáticos con cierta enjundia que, sin embargo, pueden explicarse a profanos. ¿Cuál es, a juicio del propio Littlewood, el más notable de los 19? Tras considerar y descartar la candidatura de la demostración de Euclides de la existencia de infinitos números primos, se decide por el siguiente acertijo, que debió de circular en la sociedad de la época. En un coche de ferrocarril que acaba de salir de un túnel en el que se ha llenado de humo, tres señoras, A, B, C, tienen las caras tiznadas de carbonilla y las tres se están riendo. De pronto, A se pregunta ¿cómo no se dará cuenta B de que C se está riendo de ella? E inmediatamente concluye que, con toda seguridad, ella misma, A, está también tiznada. Encontramos aquí un razonamiento por reducción al absurdo. Si yo, A, no estuviera tiznada, B pensaría que, si ella, B, no estuviera tiznada, C no tendría motivos para reírse. Así B sabría que ella misma y C están tiznadas y A no, con lo que B no se reiría. Como B se ríe, yo estoy manchada. Littlewood presenta una generalización a n señoras tiznadas, en la que además de la reducción al absurdo hay que emplear inducción. □

Ejemplo. También algunos problemas de aritmética contribuyen a desarrollar el pensamiento. En mi generación, era típico en la llamada reválida elemental el problema llamado de los grifos. Un grifo llena un depósito en dos horas, un segundo grifo lo hace en tres; ¿cuánto tarda el depósito en llenarse si se abren ambos de modo simultáneo? Este problema estaba considerado difícil en aquellas épocas. Muchos alumnos concluyen que, como los grifos suman sus contribuciones, el resultado debe ser la suma de dos más tres horas, o sea cinco horas, lo que manifiestamente es incorrecto. El problema carece de cualquier relevancia para la vida cotidiana, sólo vale para enseñar a pensar: ¿cuál es la magnitud que se suma al abrir simultáneamente los grifos? Otro muy viejo problema considerado difícil porque algunos se apresuran a dar una respuesta claramente errónea es el siguiente: una botella y su tapón cuestan una peseta y diez céntimos y la botella vale una peseta más que el tapón; ¿cuánto vale cada cosa? La respuesta más común es que la botella cuesta una peseta y el tapón diez céntimos. □

El valor formativo se aduce como argumento para dotar a las matemáticas de una presencia grande en los planes de estudios, presencia que siempre parece ser insuficiente. Sin embargo, lamento tener que decir que, por desgracia, en la práctica, en las aulas hoy se hace muy poco para que los alumnos de secundaria se valgan de la matemática para mejorar su forma de razonar.

Retrotrayéndome a mi propia generación, habrá que recordar el tedio de multiplicar mediante tablas de logaritmos, dividir polinomios, simplificar o racionalizar largas expresiones algebraicas, y derivar complicadísimas funciones artificiosas (que luego jamás hemos vuelto a encontrar en nuestro trabajo científico). Ciertamente, para el que va a usar las matemáticas es importante saber operar con soltura y sin errores; pero ello no enseña a razonar. Por suerte, aparecían también cuestiones que obligaban a pensar, en especial problemas de geometría euclídea y aritmética (ver los ejemplos anteriores). Como suele ocurrir en la enseñanza, la oportunidad brindada por esas cuestiones era aprovechada en mayor o menor medida de acuerdo con la aptitud del profesor. Los problemas de aritmética eran reducidos por algunos de éstos a un elenco cerrado de problemas tipo y, con frecuencia, perseguían el objetivo de que los alumnos aprendieran de memoria una receta para cada tipo. Así, para el problema de los grifos había que memorizar que no se sumaban los tiempos sino los inversos. De esta forma, lo que inicialmente presentaba cierto interés conceptual se volvía un mero ejercicio rutinario de suma de fracciones, carente además de cualquier valor práctico. Introducir problemas que ayuden a pensar para acto seguido resolverlos con una receta es como lanzar una versión sin calorías de un suplemento calórico de la dieta. En el caso de la geometría (sintética) tal reducción a problemas modelo era más difícil o acaso imposible (¿es ésta la razón de su desaparición de los programas?).

Si seguimos la evolución de la enseñanza secundaria en España veremos cómo, cada vez más, se han ido potenciando los aspectos más rutinarios y mecánicos en detrimento del razonamiento. Con frecuencia todo lo que hoy se espera en la asignatura de matemáticas del alumno de secundaria es que aprenda una serie de reglas de manipulación de símbolos y las aplique de modo ciego. Eso puede serle útil para hacerse persona disciplinada, dócil u ordenada, pero nunca creativa o crítica. De los programas han ido desaparecido los contenidos, a veces muy sencillos, que servían para desarrollar el pensamiento lógico, muy singularmente los de geometría euclídea. Como consecuencia, no es por desgracia infrecuente encontrarnos hoy con alumnos universitarios de asignaturas de matemáticas, incluso en casos extremos en el posgrado, que desconocen la idea de demostración o que no se dan cuenta de que de «A implica B» no se puede concluir que «no A implica no B».

No es éste el momento de analizar las causas de la evolución de los programas de estudio de matemáticas en la secundaria. Sin duda, un motor de los cambios fue el énfasis en el rigor y la generalidad ligado al enfoque formalista y estructuralista de la cultura matemática en los años posteriores a la segunda guerra mundial. Ese enfoque, a menudo asociado con nombre de Bourbaki, tenía su origen en la imperiosa necesidad de superar la crisis de fundamentos del cambio de siglo. Es debatible hasta qué punto el nuevo estilo debía haber alterado los planes de estudio en las licenciaturas universitarias en matemáticas. Lo cierto es que ocupó un lugar preeminente, ya perdido hoy, en dichos planes, y no sólo eso, sino que de modo muy deliberado se le hizo percolar hacia la enseñanza secundaria e incluso primaria, donde carecía totalmente de sentido. Por razones evidentes, lo que de desarrollos muy profundos llegó a estos niveles inferiores sólo pudo ser un cúmulo pedante de nuevos términos y notaciones, totalmente ayunos de contenidos e ideas reales, la llamada matemática moderna. Entre sus primeros efectos estuvo el de acabar con la geometría y con otros contenidos muy formativos («abajo Euclides» llegó a clamar un ilustre miembro de Bourbaki). Los excesos mayores de estas corrientes se eliminaron de la secundaria hace años, pero muchos de los elementos suprimidos ni se han reinstaurado, ni han sido reemplazados por otros más modernos que puedan jugar un papel educativo similar.

De manera paralela a la evolución de los programas, hemos asistido a otro cambio importante. Los problemas han ido desapareciendo de la enseñanza secundaria, viéndose reemplazados por ejercicios. Problemas y ejercicios son igualmente imprescindibles en el aprendizaje matemático. Estos términos deben poseer en matemáticas el mismo significado que en la vida cotidiana. Con los problemas nos preocupamos, de los ejercicios nos ocupamos. Pasear una hora es un recomendable ejercicio, pero no es un problema para una persona joven, sana y con tiempo libre. El que llega a la estación cuando el último tren ha salido y no puede volver a casa tiene un problema que deberá pensar cómo resolver. Del mismo modo, aplicar las reglas que permiten determinar para qué valores de un parámetro un sistema lineal de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas tiene solución única es un ejercicio, tal vez útil en muy especiales circunstancias, pero no es un problema, por más que lo califiquemos de tal en nuestro bachillerato. Tampoco son problemas las aplicaciones rutinarias de la regla de L'Hôpital, buscar los máximos y mínimos de funciones sencillas, etc. ¿Cuáles son las razones por las que se han abandonado los problemas? En mi opinión, ante todo hay una psicológica: en la medida que una cuestión sea realmente problemática, cabe la posibilidad de que un alumno dado no sea capaz de resolverla o no la resuelva bien, y esto naturalmente viene acompañado siempre de cierta frustración y desaliento. Más embarazosos todavía son los casos en que es el propio profesor el equivocado, algo que puede ocurrirnos a cualquiera en cualquier momento si no nos ceñimos a la rutina. Por tanto hay una comprensible tendencia a instalarse en la zona de comodidad que el ejercicio mecánico proporciona. Pero, si no me equivoco, creo que hay aquí también un efecto pernicioso de las pruebas de acceso a la universidad. Dada la necesidad de que los alumnos estudiosos estén seguros de superarlas con calificaciones altas, para poder así acceder a los estudios universitarios que desean, se llega a eliminar de ellas todo lo que pueda poner en riesgo tal fin. La introducción de verdaderos problemas sería considerada como una forma injusta de ruleta rusa.

Estos fenómenos que, con cierta dosis de exageración, podríamos llamar de expulsión del razonamiento tienen, claro es, consecuencias perversas. Entre otras, la de ejercer una selección negativa de los alumnos, de suerte que, en secundaria, en ocasiones se interesen más por las matemáticas precisamente aquellos peor dotados para ellas, a quienes satisface poder completar sin equivocarse largas series de instrucciones complejas, sin entender el porqué. En sentido contrario, cuando se pregunta a un matemático profesional qué materia le interesaba más en la secundaria es frecuente que la respuesta sea la química o el latín. A mi parecer, la matemática de secundaria sería más formativa si incorporásemos a ella cuestiones como las contenidas en los ejemplos anteriores. Muchas de ellas no requieren apenas conocimientos previos para ser abordadas. Otras incorporan elementos de la vida cotidiana fácilmente inteligibles para niños y adolescentes. Y, debidamente escogidas, pueden servir para formar muy bien en el razonamiento abstracto. La introducción de estos contenidos debe partir de la premisa de que el objetivo de la misma ha de ser, sobre todo, ejercitar el pensamiento, contribuyendo así al desarrollo más completo de la capacidad de cada alumno. De modo paralelo, habría que eliminar de los programas tantos y tantos aspectos mecánicos y versiones *low cost* de desarrollos cuyo lugar propio son las aulas universitarias (y no todas).

3. Matemática instrumental

Dejando atrás la matemática como medio de enseñar a pensar, esta ciencia es también un instrumento del que todos nos valemos en una u otra medida. Todos necesitamos manejar las cuatro reglas de la aritmética, entender las fracciones o conocer cómo hallar el área de un rectángulo. En la secundaria es preciso impartir, independientemente de su valor formativo, conocimientos matemáticos instrumentales que se requieren ya sea en estudios posteriores de matemáticas, ya sea en otras disciplinas, muy especialmente en la física o en la economía. No voy a entrar a considerar cómo la enseñanza actual cubre estas necesidades de las otras ciencias, aunque mencionaré que lo hace de modo muy mejorable. (Un par de ejemplos. Primero: la úníca aplicación de la integral definida parecería ser el cálculo de áreas planas y volúmenes de revolución; cosas como el trabajo de una fuerza variable, la potencia media de un circuito de corriente alterna, etc. son completamente ignoradas. Segundo: la notación de Leibniz para la derivada, la que se usa normalmente en las ciencias, está proscrita en nuestros libros de secundaria.) Quiero más bien incidir en ideas matemáticas que son útiles al ciudadano medio, no sólo al futuro científico o ingeniero. Veamos algunas de ellas.

Ejemplo. Aha Bar Hanina, un caritativo rabino, ha dejado escrito en el *Talmud* (Nedarim 39b) que quien visita a un enfermo le quita la sexagésima parte de su enfermedad. Otros rabinos se quejaron de que ello no puede ser cierto, pues, de serlo, bastaría con recibir sesenta visitas para sanar del todo. Pero él les hizo observar que el segundo visitante quita un sexagésimo... de la enfermedad que dejó el primero. Por muchas visitas que se reciban la enfermedad no desaparece. Los rabinos discordantes ilustran la dificultad con que todos entendemos el crecimiento y decrecimiento exponencial. Y, sin embargo, comprenderlo bien es crucial antes de endeudarse con un crédito, para apreciar los riesgos de la falta de control de la natalidad en ciertos países, entender las estafas piramidales, etc. Un estudio del Banco de España encuentra que, frente a una sencillísima pregunta sobre el interés compuesto, el 39 % de los españoles con estudios primarios dan la respuesta correcta, el 42 % dan una errónea y 19 % afirman no conocer la respuesta. Para nuestros compatriotas con formación universitaria los porcentajes son, respectivamente, 53, 42 y 2. La universidad y los estudios secundarios hacen subir el porcentaje de respuestas correctas sólo del 39 al 53, lo cual es tal vez preocupante. Más preocupante: que la educación parezca reducir del 19 al 2 % el número de personas que son conscientes de su ignorancia en este punto y capaces de confesarla. □

Ejemplo. La confusión entre cifras absolutas y relativas es casi universal en nuestra vida pública. Se nos sigue dando como noticia en la prensa que el número de animales de compañía es mucho menor en La Rioja que en Andalucía, mientras que en ésta hay más accidentes de tráfico que en aquélla. De otra parte, el elegir manejar cifras absolutas o relativas para servir a los propios fines es una de las herramientas propagandísticas que más utilizan publicistas y políticos. Oímos: este año las ventas de tal o cual producto han aumentado un 50 %, las exportaciones de nuestra empresa se han duplicado recientemente, hemos construido el triple de infraestructuras que el ejercicio anterior. Esto suele significar: el año pasado apenas vendimos, estamos empezando a exportar, el ejercicio anterior la inversión en infraestructuras fue insignificante. El alcalde de una gran ciudad dará siempre cifras absolutas para lo bueno y relativas para lo malo. Este recurso se suele completar con el de transmitir información referida no a la magnitud de interés sino a una de sus derivadas. Si el paro es exorbitado, no demos la cifra de desempleados, limitándonos a comentar que ha bajado el 2 % gracias a nuestra gestión. Si ni siquiera la derivada primera nos es favorable, no hay motivo para preocuparnos: anunciaremos que la tasa a la que aumenta el paro está descendiendo (siempre gracias a nuestra gestión). □

Ejemplo. Los gráficos ofrecen amplio campo de acción al propagandista. Si deseamos resaltar la buena marcha del turismo en nuestra región, no se nos olvidará incluir un mapa en que representemos las cantidades de turistas por círculos de radios proporcionales al número de visitantes. Así una ventaja del 20 % se visualizará como si fuera casi del 50 %. Y mejor no hablar de la trampa de truncar el eje vertical de los histogramas para que, por ejemplo, una pequeña mejora de la cuenta de resultados parezca un salto ciclópeo. □

Ejemplo. Hace años leí en un periódico que las mujeres mayores no tenían riesgo especial de alumbrar hijos con síndrome de Down. Apoyaba el aserto citando el pequeñísimo porcentaje de personas con el síndrome que nacen de madre mayor de 40 años. Por supuesto, esa probabilidad no dice nada, es simplemente consecuencia del bajo número de bebés nacidos de madre mayor. Lo relevante hubiese sido conocer la probabilidad de síndrome en el bebé condicionada a madre mayor, no la probabilidad de madre mayor condicionada a síndrome de Down, que era la que se proporcionaba. Los ejemplos similares podrían multiplicarse *ad infinitum*. Noticias de este tipo pueden tener consecuencias muy graves. □

Ejemplo. Al compararse dos posibles tratamientos A y B de los cálculos renales, se encontró que A fue efectivo en 273 de los 350 pacientes de un grupo y B en 289 de un segundo grupo de 350. Es decir, en términos relativos, A fue efectivo en 78 de cada 100 casos y B en 83 de cada 100. ¿Concluiremos que B es mejor que A dada su mayor tasa de éxito? En absoluto. En cálculos pequeños, A fue efectivo en el 93 % de los casos y B sólo en el 87 %. Para los grandes, A fue efectivo en el 73 % y B sólo en el 69 %, de modo que A es mejor que B en ambos tipos. Tanto si su piedra es grande como si es pequeña, el paciente preferirá A. Éste es un ejemplo de la llamada paradoja de Simpson. La aparente contradicción se explica porque el tratamiento B se ensayó sobre todo en cálculos pequeños, fáciles de tratar, y A, más costoso, sobre todo en los más difíciles cálculos grandes. La paradoja de Simpson aparece una y otra vez: un caso bien conocido se refiere a la supuesta discriminación por género en la admisión de alumnos a la Universidad de California en Berkeley. □

Hoy la comprensión del mundo requiere de conceptos matemáticos sencillos como los que acabamos de ver, o cuando menos, se facilita cuando se poseen y manejan tales conceptos. Este tipo de conocimiento instrumental puede ser beneficioso no sólo para el individuo, sino también para la salud democrática de toda la sociedad, al incrementar la calidad de los criterios de juicio empleados en los debates públicos. Los planes de estudios no incorporan los elementos a los que estoy refiriéndome, o al menos no de manera suficiente. ¿Podríamos introducirlos, tras suprimir otros que parecen estar en los programas sólo para dar pie a la realización de ejercicios mecánicos?

4. Colofón

Las ideas anteriores pueden verse, desarrolladas con mayor amplitud y más ejemplos, en el texto de mi discurso inaugural del año académico 2018–2019 en la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, disponible, si a alguien interesase, en el apartado «Otras Publicaciones» de la página en la red:

`http://sanzserna.org/publicaciones.php`

Además, el discurso contiene análisis detallados de:

- Los contenidos de un libro de matemáticas de secundaria, puestos en relación con el estado actual de la matemática.
- Las matemáticas en las pruebas de acceso a la universidad en las 17 comunidades autónomas. Casi sin excepción, no incluyen ni un solo problema merecedor del nombre.

J. M. Sanz-Serna, Departamento de Matemáticas, Universidad Carlos III de Madrid, Avenida de la Universidad 30, E-28911 Leganés (Madrid)
Correo electrónico: jmsanzserna@gmail.com
Página web: http://sanzserna.org